INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

CLASA A IX-A

1. Se consideră ecuația: $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$.
   a) Se cere m astfel încât ecuația să aibă rădăcini reale.
   b) Arătați că $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 5$, $\forall m \in \mathbb{R}$, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației.
   c) Se cer valorile lui m astfel încât ambele rădăcini ale ecuației să fie numere întregi.

2. Se consideră funcțiile $f, g, h: [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x^2 + 4x$, $g(x) = ax + 1$, $h(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}^*$.
   a) Dacă $a = 2$, reprezentați grafic funcțiile f, g și h în același sistem de axe de coordonate (xOy).
   b) Arătați că $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [0,2]$ dacă și numai dacă $a = 2$.
   c) Dacă notăm cu A aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției f, axa (Ox) și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 2$, arătați că $A \in (4,6)$.

3. Pe o tablă sunt scrise numerele naturale $1,2,3,4,\ldots,98,99,100$. Un elev șterge de pe tablă toate numerele care sunt în progresie aritmetică cu rația 2 și care încep cu numărul 1. Un alt elev șterge și el toate numerele în progresie aritmetică cu rația 3 și care încep tot cu numărul 1, după ce acestea au fost scrise din nou pe tablă.
   a) Verificați dacă numerele 61 și 73 au fost șterse.
   b) Calculați suma numerelor rămase.

4. O bucată de tablă are forma unui triunghi ABC cu $AB = 13$ dm, $AC = 14$ dm și $BC = 15$ dm.
   a) Să se calculeze aria triunghiului ABC și lungimea înălțimii AD corespunzătoare laturii BC.
   b) Se decupează din bucata de tablă o placă în formă de dreptunghi $MNPQ$, unde $M, Q \in (BC)$, $N \in (AB)$, $P \in (AC)$ astfel încât $MN || AD$ și $NP || BC$. Notând $MN = x$, demonstrați că $A_{MNPQ} = \frac{15}{56}(56x - 5x^2)$. Știind că aria plăcii decupate este maximă, arătați că aceasta reprezintă 50% din aria plăcii ABC.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

CLASA A X-A

1. Pentru $x, y \in (0, \infty)\setminus\{1\}$ definim operația $x * y = \log_x y + \log_y x$.
   a) Demonstrați că $n * n^3$ are o valoare constantă, oricare ar fi $n \in (1, \infty)$.
   b) Demonstrați că $x * \frac{1}{y} = \frac{1}{x} * y$, oricare ar fi $x, y \in (0, \infty)\setminus\{1\}$.
   c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $a^x * b - a * b^x = \frac{3}{2}(\log_b a - \log_a b)$, unde $a, b \in (1, \infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$, definită prin relația $f(1) = 1$, $f(n) - nf(n-1) = n$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$.
   a) Demonstrați că $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \geq \frac{n(n+1)}{2}$, oricare ar fi numărul natural n, $n \geq 2$.
   b) Verificați relația $(n+1)A_n^k = A_{n+1}^{k+1}$, oricare ar fi numerele naturale n, k cu $0 \leq k \leq n$.
   c) Demonstrați că $f(n) = A_n^1 + A_n^2 + A_n^3 + \cdots + A_n^n$, oricare ar fi numărul natural nenul n, utilizând eventual metoda inducției matematice.

3. Un echipaj al Poliției Rutiere a constatat că au fost verificați un număr de 25 de conducători auto, majoritatea au fost în regulă, iar contravenienții au primit 2 sau 5 puncte de penalizare, valoarea amenzilor administrate fiind de 2700 lei. Știind că valoarea punctului de penalizare este de 75 lei, să se determine:
   a) Câte puncte de penalizare au primit în total contravenienții?
   b) Care este numărul maxim al conducătorilor auto care au primit 5 puncte de penalizare?

4. În perioada boom-ului imobiliar prețul unui teren ultracentral a avut o creștere exponențială dată de legea $P(t) = P_0 \cdot 2^{kt}$, unde P_0 este prețul inițial, iar $P(t)$ este prețul după t ani. Știind că în anul 2004 prețul terenului era de 35000 euro, iar în 2006 prețul era de 42000 euro, estimați prețul terenului în 2008, admițând că se păstrează tendința (se pot folosi valorile aproximative $\sqrt[4]{2} = 1{,}2$ și $\sqrt{2} = 1{,}4$).

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7*

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

Profil Tehnic

CLASA A XI-A

1. Se consideră sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2^{a} \\ x + y + 2z = 4^{a} \end{cases}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

   a) Să se calculeze determinantul sistemului.
   b) Să se determine soluția $(x(a), y(a), z(a))$ a sistemului de ecuații.
   c) Să se determine mulțimea $A = \{a \in \mathbf{R} \mid y(a) > 1\}$.

2. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{\alpha} - \alpha x$, unde $\alpha \in (0,1)$.
   a) Să se precizeze intervalele de monotonie pentru funcția f.
   b) Să se deducă inegalitatea: $x^{\alpha} \leq \alpha x - \alpha + 1$, $\forall \alpha \in (0, +\infty)$.
   c) Să se arate că $a^{\alpha} b^{\beta} \leq \alpha a + \beta b$, $\forall a, b > 0$ și $\forall \alpha, \beta > 0$ cu $\alpha + \beta = 1$.

3. Fie parabola de ecuație $y = 4x^2 - 1$ și dreapta (d), tangentă la parabolă în punctul de abscisă $x = \frac{1}{8}$.
   a) Să se determine unghiul pe care îl face dreapta (d) cu axa (Ox).
   b) Să se determine aria triunghiului determinat de dreapta (d) cu axele de coordonate.

4. Fie matricea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 \\ a_4 & 0 & a_5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Z}).$$

   Andrei și Bogdan joacă următorul joc: Andrei dă o valoare lui a_1, apoi Bogdan dă o valoare lui a_2, după aceasta, Andrei dă o valoare lui a_3 și apoi Bogdan dă o valoare lui a_4. În final, Andrei dă o valoare lui a_5. Andrei câștigă numai dacă $\det(M^2) = 1$.
   Să se determine tripletele (a_1, a_3, a_5) care asigură victoria lui Andrei, oricare ar fi alegerile făcute de Bogdan.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

CLASA A XII-A

1. Se consideră polinoamele:
   $f = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ și
   $g = x^3 - x^2 + x - 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{C}$.
   a) Calculați $y_1^{2014} + y_2^{2014} + y_3^{2014}$.
   b) Arătați că $f = xg + 1$ și apoi demonstrați că $g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4) \in \mathbb{N}$.
   c) Calculați $f(y_1) + f(y_2) + f(y_3)$.

2. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \cos x$ și fie F o primitivă a sa.
   a) Să se calculeze: $I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.
   b) Să se determine primitivele funcției $f(x)$.
   c) Aflați $\log_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x^4}$.

3. Fie M o mulțime nevidă și „*„ o operație algebrică pe M, astfel încât:
   $(u * v) * (x * y) = u * y, \quad \forall u, v, x, y \in M.$
   Dacă $a * b = c$, cu $a, b, c \in M$, demonstrați că:
   a) $c * c = c$;
   b) $a * z = c * z$, $\forall z \in M$.

4. Cvadrupla de numere reale (a, b, c, d) trece, în prima etapă în cvadrupla $(|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$și apoi procedeul continuă după aceeași regulă cu noua cvadruplă. Găsiți cvadruplele finale în următoarele cazuri:
   a) Plecând de la cvadrupla $(8,17,3,107)$, după patru etape.
   b) Plecând de la cvadrupla $(5,7,11,19)$, după șapte etape.
   c) Plecând de la cvadrupla $(n, n, 1-4n, n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, după patru etape.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7*